III/ (u_n) étant la suite définie dans **I/4/**

1/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*; e^{u_n} = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^n$

2/ Exprimer $e^{2u_p - u_{2p}}$ en fonction de p et v_{2p} $(p \in \mathbb{N}^*)$.

3/ Soit L la limite de la suite (u_n).

Déduire de ce qui précède que $L = \text{Log}\sqrt{2\pi}$.

(on admetra que $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p} = \lim\limits_{p\to+\infty} u_p = L$.)

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1/a- Soit α un réel. $(i\alpha)$ est une solution imaginaire pure de $f(z) = 0$

$$\Leftrightarrow (i\alpha)^3 + 2\left(-\sqrt{3} + i\right)(i\alpha)^2 + 4\left(1 - i\sqrt{3}\right)(i\alpha) + 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow -i\alpha^3 + 2\alpha^2\sqrt{3} - 2i\alpha^2 + 4i\alpha + 4\sqrt{3}\,\alpha + 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\alpha^2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\,\alpha\right) + i(-\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\,\alpha = 0 \\ -\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -2 \\ -\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 8 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \alpha = -2$ car seul -2 vérifie les deux équations.

Conclusion : $z_0 = -2i$ est la solution imaginaire pure de $f(z) = 0$.

b- $z_0 = -2i$ est une racine de $f(z) = 0$

$\Rightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $f(z) = (z - (-2i))(az^2 + bz + c); \forall z \in \mathbb{C}$

$\cdot\ f(z) = (z + 2i)(az^2 + bz + c); \forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow f(z) = az^3 + bz^2 + zc + 2iaz^2 + 2ibz + 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow f(z) = az^3 + (2ia + b)z^2 + (2ib + c)z + 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2ia + b = 2\left(-\sqrt{3} + i\right) \\ 2ib + c = 4\left(1 - i\sqrt{3}\right) \\ 2ic = 8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2\sqrt{3} \\ c = 4 \end{cases}$$

Par suite $f(z) = (z + 2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4\right)$

D'où $f(z) = 0 \Leftrightarrow z + 2i = 0$ ou $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$

$(\Delta' = 3 - 4 = -1 = (i)^2)$

$\Leftrightarrow z = -2i$ ou $z = \sqrt{3} - i$ ou $z = \sqrt{3} + i$

Bilan : Les solutions de l'équation $f(z) = 0$ sont $z_0 = -2i$, $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.